УДК 621.372.852:612.014

Е. Л. ПИРОТТИ, д-р техн. наук,
В. А. ОТДЕЛЬНОВ, студент НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАЛЫХ БИОЛОГИЧЕСКИХ СФЕРАХ (ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА)

Стаття присвячена оцінці наближень нульового, першого та другого порядку на розподіл електромагнітного поля у малих сферах. Запропоновані необхідні моделі. Результати роботи у статті представлені графічно та можуть бути використані в розробках програмного забезпечення, де приділяють увагу вивченню розподілу СВЧ коливань та побудові біомедичних елементів, пристроїв та систем.

Статья посвящена оценке приближений нулевого, первого и второго порядка на распределение электромагнитного поля в малых сферах. Предложены необходимые модели. Результаты работы в статье представлены графически и могут быть использованы в разработках программного обеспечения, где уделяют внимание изучению распределения СВЧ колебаний и построению биомедицинских элементов, приборов и систем.

The article is devoted to evaluating the influence of null, first and second approximations on the distribution of electromagnetic field in small spheres. The necessary models are offered. Results of work are shown graphically can be used in other development of the software where they pay much attention to researching of the extra-high frequency oscillations and construction of biomedical elements, equipment and systems.

Введение. Исследование механизма взаимодействия электромагнитных полей с различными биологическими тканями невозможно без точной информации о распределении этих полей внутри объекта, ибо этот механизм непосредственно связан как с величиной, так и с ориентацией электрической и магнитной составляющих поля. Таким образом, определение электромагнитных полей (ЭМП) в таком сферическом элементе, как клетка, по заданному полю облучения является первоочередной задачей электромагнитной биологии. Так как экспериментальное исследование распределения внутренних полей провести практически невозможно, встает вопрос о решении этой задачи теоретическими методами.

Существенным является и то, что известные строгие и приближенные методы приводят очень часто к громоздким вычислениям, связанным с весьма серьезными трудностями математического характера и с использованием мощной вычислительной техники. В то же время прикладная сторона электромагнитного воздействия на организм человека, связанная с конкретными техническими разработками специальных медицинских приборов и систем, требует как простых подходов, так и простых решений поставленных задач, которыми бы могли пользоваться лица, не имеющие специальной подготовки в области электродинамики и математики.

Будем исследовать дифракцию электромагнитных волн на многослойных малых телах не на основе уравнений Максвелла в дифференциальной форме, а на основе интегральных уравнений, эквивалентных уравнениям Максвелла совместно с граничными условиями на границе слоев и самого тела с окружающей средой.

Такое решение можно получить для тел, размеры которых малы по сравнению с длиной падающей волны. В этом случае поля внутри и вне рассеивающего тела можно разложить по малому параметру a/λ, где a - линейные размеры тела, λ - длина рассеиваемой волны, и построить соотношения для различных приближений внутренних полей.

Пусть пространство, в котором находится облучаемый объект, однородно и характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_c и $\mu_c = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\tilde{A}\acute{\imath}}{\grave{\imath}}$. Тогда электромагнитное поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во всех точках этого пространства будет описываться уравнениями Максвелла:

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ rot\vec{H} = \varepsilon_c \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{1}$$

После преобразований получаем:

$$\begin{cases} graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E} - k^2\vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{g}; \\ graddiv\vec{H} - \Delta\vec{H} - k^2\vec{H} = rot\vec{g}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\vec{g} = i\omega(\varepsilon - \varepsilon_c)\vec{E}$.

Используя функцию Грина, можно привести уравнения к интегральным уравнениям Максвелла совместно с граничными условиями на границе раздела двух сред:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \dfrac{1}{4\pi}\left(graddiv + k^2\right)\displaystyle\int_V \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}\,')f\left(|\vec{r} - \vec{r}\,'|\right)d\vec{r}\,'; \\ \vec{H}(\vec{r}) = H_0(\vec{r}) + \dfrac{i\omega\varepsilon_c}{4\pi} rot\displaystyle\int_V \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}\,')f\left(|\vec{r} - \vec{r}\,'|\right)d\vec{r}\,', \end{cases} \tag{3}$$

где $f\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)=\dfrac{e^{-ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$, $\vec{E}_0(\vec{r})$ и $\vec{H}_0(\vec{r})$ - электрическое и магнитное поля соответственно, которые были бы в точке $\vec{r}$ при отсутствии биологического рассеивателя.

Рассеянную волну можно выразить через электрический и магнитный потенциалы Герца $\vec{П}^{э}$ и $\vec{П}^{м}$ с помощью соотношений:

$$\begin{cases}\vec{E}_{ðàññ}=\left(graddiv+k^2\right)\vec{Ï}^{\,ý}-i\omega\mu_0 rot\vec{Ï}^{\,ì}\,, \\ \vec{H}_{ðàññ}=\left(graddiv+k^2\right)\vec{Ï}^{\,ì}+i\omega\varepsilon_c rot\vec{Ï}^{\,ý}.\end{cases} \qquad (4)$$

Сравнивая (4) с (3), можно прийти к выводу, что:

$$\vec{Ï}^{\,ý}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}-1\right)\vec{E}(\vec{r}\,')f\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)d\vec{r}\,'. \qquad (5)$$

Так как зависимость электрического и магнитного поля от $\vec{r}$ связана с множителем $e^{-ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$, то, воспользовавшись степенным рядом для этой функции:

$$e^{-ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}=1-ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|+\frac{\left(ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)^2}{2!}-\cdots, \qquad (6)$$

получим:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r})&=\vec{E}^{(0)}(\vec{r})+(ik)\vec{E}^{(1)}(\vec{r})+(ik)^2\vec{E}^{(2)}(\vec{r})+\cdots;\\ \vec{H}(\vec{r})&=\vec{H}^{(0)}(\vec{r})+(ik)\vec{H}^{(1)}(\vec{r})+(ik)^2\vec{H}^{(2)}(\vec{r})+\cdots.\end{aligned} \qquad (7)$$

Кроме того:

$$f\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)=\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}-ik-\frac{k^2}{2}\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|+\cdots.. \qquad (8)$$

Приравнивая слагаемые с одинаковыми степенями (ik) слева и справа, получим систему уравнений для нулевого, первого и других приближений. Так, для нулевого приближения (случай квазистатики) имеем:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(0)}(\vec{r})&=\vec{E}_0^{(0)}(\vec{r})+\frac{1}{4\pi}graddiv\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}-1\right)\vec{E}^{(0)}(\vec{r}\,')\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}d\vec{r}\,';\\ \vec{H}^{(0)}(\vec{r})&=\vec{H}_0^{(0)}(\vec{r}).\end{aligned} \qquad (9)$$

Для первого приближения:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{E}_0^{(1)}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} graddiv \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1\right)\left[\vec{E}^{(1)}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{E}^{(0)}(\vec{r}\,')\right] d\vec{r}\,';$$
$$\vec{H}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{H}_0^{(1)}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi Z_c} rot \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1\right)\vec{E}^{(0)}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\vec{r}\,', \qquad (10)$$

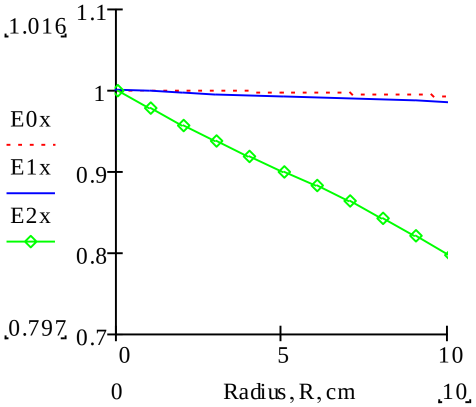
где $Z_c = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_c}}$ - характеристическое сопротивление окружающей биообъект среды. Для второго приближения:

$$\vec{E}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{E}_0^{(2)}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} graddiv \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1\right)\left[\vec{E}^{(2)}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \right.$$
$$\left. + \vec{E}^{(0)}(\vec{r}\,')\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{2} - \vec{E}^{(1)}(\vec{r}\,')\right] d\vec{r}\,' - \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1\right)\vec{E}^{(0)}(\vec{r}\,')\frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}; \qquad , \qquad (11)$$
$$\vec{H}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{H}_0^{(2)}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi Z_c} rot \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1\right)\left[\vec{E}^{(1)}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{E}^{(0)}(\vec{r}\,')\right] d\vec{r}\,'.$$

Так как методика решения уравнений, определяющих электромагнитные поля одинакова, рассмотрим нулевое приближение. В качестве характерной формы для тел, удовлетворяющих требованию $a/\lambda << 1$, можно считать эллипсоид. В этом случае для решения интегральных уравнений (3) целесообразно ввести вспомогательную функцию W, являющуюся ньютоновским потенциалом однородного эллипсоида:

$$W(\vec{r}) = \int_V \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \qquad (12)$$

Итак, в том случае, если ньютоновский потенциал есть квадратичная функция координат, то нулевое приближение для электромагнитного поля внутри биологического объекта будет иметь тот же характер, что и внешнее поле. Если внешнее поле однородно, то и внутреннее также однородно. Этот же вывод касается и приближений более высокого порядка. Учитывая всё вышеизложенное, и, перейдя в сферическую систему координат, можно получить значения электрической составляющей электромагнитного поля в рассматриваемом сферическом элементе.



Составляющие нулевого, первого и второго приближений

По рисунку можно сделать следующий однозначный вывод: при решении задач подобного типа нельзя ограничиваться нулевым и первым приближением. В нулевом приближении график имеет вид прямой, почти параллельной оси абсцисс, в первом же значения уточнены, однако именно второе приближение даёт более правдоподобные результаты, где происходит колебательный процесс.

Выводы. Ранее, при учёте только нулевого приближения, считалось, что электромагнитное поле распределяется равномерно в подобных телах, то есть, амплитуда электрического поля не изменяется по всей длине радиуса, считая процесс квазистатичным. Однако вычисления показывают, что уже во втором приближении происходит изменение амплитуды. Можно предположить, что колебания амплитуды в более высоких приближениях будут более ярко выражены. Полученные результаты позволяют оценивать амплитуды составляющих поля не только, когда $a/\lambda = 0.1$, но и когда длина волны приближается к геометрическим размерам тела.

Список литературы: ***1.*** *Хижняк Н.А.* Применение интегральных уравнений электродинамики к решению дифракционных задач // Ученые записки ХГУ. Труды радиофизического факультета. - 1957. - Т.2. - С. 13-32. ***2.*** *Хижняк Н.А.* Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред // ЖТФ. - 1958. - Т. 28, № 7. - С. 1592 - 1609. ***3.*** *Пиротти Е.Л.* Внутренние электромагнитные поля в биообъектах, имеющих ***n***-слойную структуру // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. - Харьков: ХГТУРЭ. - 1997. - Вып. 106. - С. 154 - 159. ***4.*** *Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф.* Специальный курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1976. - 389 с.

Поступила в редколлегию 30.11.07